مراجعة منهج الفراغية

أولا النظام الثلاثي المتعامد :-

محور س:-

معادلته :- ص = ٠ ، ع = ٠ ، العمود الساقط عليه من اي نقطة (أقصر بعد) = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$

محور ص:-

معادلته :- س = ٠ ، ع = ٠ ، العمود الساقط عليه من اي نقطة (أقصر بعد) = $\sqrt{س^2 + ع^2}$

محور ع:-

معادلته :- س = ٠ ، ص = ٠ ، العمود الساقط عليه من اي نقطة (أقصر بعد) = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

المستوى س ص:-

معادلته :- ع = ٠ ، العمود الساقط عليه من اي نقطة (أقصر بعد) = $|ع|$

المستوى س ع:-

معادلته :- ص = ٠ ، العمود الساقط عليه من اي نقطة (أقصر بعد) = $|ص|$

المستوى ص ع:-

معادلته :- س = ٠ ، العمود الساقط عليه من اي نقطة (أقصر بعد) = $|س|$

ثانيا البعد بين نقطتين ونقطة المنتصف :-

إذا كان أ (ل ، م ، ن) ، ب (ك ، د ، و) فإن:-

طول أ ب = $\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{(ك - ل)^2 + (د - م)^2 + (و - ن)^2}$

نقطة منتصف أ ب = $\left(\frac{ل + ك}{٢} ، \frac{م + د}{٢} ، \frac{ن + و}{٢} \right)$

ملاحظة :- لو معطي نقطة المنتصف وطلب منك أحد الطرفين فإن هذا الطرف = ٢ المنتصف – الطرف الاخر

ملاحظة :- هذا النوع يستخدم لتحديد نوع المثلث – اثبات النقاط علي استقامة واحدة – إثبات أي شكل رباعي

ملاحظة :- هذا النوع يستخدم أيضاً لايجاد مساحة أي شكل هندسي

ثالثا معادلات الكرة:-

بفرض أن م (مركز الكرة) = (ل ، م ، ن) وطول نصف قطرها نق فإن لمعادلة الكرة صورتان :-

المعادلة القياسية:- $(س - ل)^{٢} + (ص - م)^{٢} + (ع - ن)^{٢} = نق^{٢}$

المعادلة العامة :- $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢ ل س - ٢ م ص - ٢ ن ع + د = ٠$

ملاحظة :- لإيجاد مركز الكرة من الصورة العامة م = $\left(\frac{-معامل\ س}{٢} ، \frac{-معامل\ ص}{٢} ، \frac{-معامل\ ع}{٢} \right)$ = (ل ، م ، ن)

ملاحظة :- لايجاد نصف القطر نق من الصورة العامة = $\sqrt{ل^{٢} + م^{٢} + ن^{٢} - د}$

ملاحظة :- هذا بشرط أن معامل س = معامل ص = معامل ع = ١

الملاحظات العامة على معادلة الكرة

١- الكرة التي مركزها م وتمر بالنقطة أ فإن نصف قطرها نق = م أ

٢- الكرة التي أ ب طرفي قطر فيها فإن مركزها م هو منتصف $\overline{أ ب}$ ، نصف قطرها نق = م أ = م ب = $\frac{أ ب}{٢}$

٣- إ ذا كانت الكرة تمس مستويات الإحداثيات الثلاثة وطول نصف قطرها نق فإن مركزها م (∓ نق ، ∓ نق ، ∓ نق)

٤- الكرة تمس محاور الإحداثيات الثلاثة وطول نصف قطرها نق فإن مركزها م ($\mp \frac{نق\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\mp \frac{نق\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\mp \frac{نق\sqrt{٢}}{٢}$)

٥- إذا كان مركز الكرة م (ل ، م ، ن) والكرة تمس محور س فإن نصف القطر نق = $\sqrt{م^{٢} + ن^{٢}}$

٦- إذا كان مركز الكرة م (ل ، م ، ن) والكرة تمس محور ص فإن نصف القطر نق = $\sqrt{ل^{٢} + ن^{٢}}$

٧- إذا كان مركز الكرة م (ل ، م ، ن) والكرة تمس محور ع فإن نصف القطر نق = $\sqrt{ل^{٢} + م^{٢}}$

٨- إذا كان مركز الكرة م (ل ، م ، ن) والكرة تمس المستوي س ص فإن نصف القطر نق = $|ن|$

٩- إذا كان مركز الكرة م (ل ، م ، ن) والكرة تمس المستوي س ع فإن نصف القطر نق = $|م|$

١٠- إذا كان مركز الكرة م (ل ، م ، ن) والكرة تمس المستوي ص ع فإن نصف القطر نق = $|ل|$

١١- الكرة تمس أوجه المكعب الذي طول حرفه ل فإن ٢ نق = ل

١٢- الكرة تمر برؤوس المكعب الذي طول حرفه ل فإن ٢ نق = $\sqrt{٣}$ ل = قطر المكعب

١٣- الكرة تقطع محور السينات في أ ب فإن لايجاد أ ب يجب أن تعوض في الصورة القياسية عن ص = ٠ ، ع = ٠

١٤- أصغر كرة تمر بالنقط (ل ، ل ، ٠) ، (٠ ، ل ، ل) ، (ل ، ٠ ، ل) فإن مركزها م = $\frac{اجمع\ الاحداثيات}{٣}$

١٥-أصغر كرة تمر بالنقط (ل ، ل ، ٠) ، (٠ ، ل ، ل) ، (ل ، ٠ ، ل) فإن نصف قطرها نق = $|ل| \frac{\sqrt{٦}}{٣}$

١٦- موضع النقطة أ بالنسبة للكرة: إذا كان م أ > نق فإن أ تقع خارج الكرة،م أ=نق تقع علي الكرة،م أ<نق تقع داخل

١٧- علاقة الكرتان :- أولا لابد إيجاد $م_1$ ، $نق_1$ ، $م_2$ ، $نق_2$ ثم تطبيق ما يلي
١- $م_1 م_2$ = $نق_1$ + $نق_2$ فإن الكرتان متماستان من الخارج
٢- $م_1 م_2$ = $نق_1$ - $نق_2$ فإن الكرتان متماستان من الداخل حيث $نق_1$ > $نق_2$
٣- $م_1 م_2$ > $نق_1$ + $نق_2$ فإن الكرتان متباعدتان
٤- $نق_1$ – $نق_2$ < $م_1 م_2$ < $نق_1$ + $نق_2$ فإن الكرتان متقاطعتان
٥- $م_1 م_2$ < $نق_1$ – $نق_2$ فإن الكرتان متداخلتان

١٨- مساحة الكرة = ٤ π $نق^2$ ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^3$

١٩- عدد الكرات التي تمس محاور الاحداثيات الثلاثة وطول نصف قطرها نق تساوي ٨

٢٠- كرة نصف قطرها نق و التي تمر برؤوس مكعب مرسوم داخلها فإن المساحة الكلية للمكعب = ٨ $نق^2$

رابعا المتجهات :-

$\overleftarrow{و}$ المتجه الصفري (٠ ، ٠ ، ٠) وأيضاً يمكن تسميته بنقطة الاصل

إذا كان $\overleftarrow{أ}$(ل ، م ، ن) فإنه يمكن كتابته بدلاله متجهات الوحدة الاساسيه $\overleftarrow{أ}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ + ن $\overleftarrow{ع}$

ويسمي ل مركبة (مسقط) $\overleftarrow{أ}$ في اتجاه محور س ، ويسمي م مركبة (مسقط) $\overleftarrow{أ}$ في إتجاه محور ص ويسمي ن مركبة (مسقط) $\overleftarrow{أ}$ في اتجاه محور ع

متجه الوحدة : هو متجه معياره الواحد الصحيح بمعني إذا كان $\overleftarrow{أ}$ متجه وحدة فإن $\| \overleftarrow{أ} \|$ = ١ ، $\overleftarrow{ي}$ = $\frac{\text{المتجه}}{\text{معيار المتجه}}$

ملاحظات

١- زوايا الاتجاه مع محاور الاحداثيات هي ($θ_س$، $θ_ص$ ، $θ_ع$) فإن توجد ٣ علاقات هامة :-

$جتا^2 θ_س$ + $جتا^2 θ_ص$ + $جتا^2 θ_ع$ = ١ ، جتا ٢ $θ_س$ + جتا ٢ $θ_ص$ + جتا ٢ $θ_ع$ = -١ ، $جا^2 θ_س$ + $جا^2 θ_ص$ + $جا^2 θ_ع$ = ٢

٢- $\| ك \overleftarrow{أ} \|$ = $|ك|$ $\| \overleftarrow{أ} \|$ حيث ك مجهول مطلوب إيجادة بينما لو كان بدل ك رقم موجب أو سالب فإنه يخرج +

٣- المتجه يصنع زوايا متساوية مع محاور الاحداثيات فإن جتا $θ_س$ = جتا $θ_ص$ = جتا $θ_ع$ = ∓ $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

٤- إذا كان ل زاوية يصنعها المتجه مع المستوي ص ع فإن: $θ_س$ = ٩٠ – ل
٥- إذا كان م زاوية يصنعها المتجه مع المستوي س ع فإن: $θ_ص$ = ٩٠ – م
٦- إذا كان ن زاوية يصنعها المتجه مع المستوي س ص فإن: $θ_ع$ = ٩٠ – ن
٧- إذا كانت $θ_س$ + $θ_ص$ = ٩٠ ° فإن $θ_ع$ = ٩٠

٨- في المثلث أ ب ج وكان أ د متوسط خارج من الرأس فإن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أج} = ٢\ \overrightarrow{أد}$

٩- إذا كان معطي $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بج}$ فإن العلاقة الرابطة بينهم $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} = \overrightarrow{أج}$

١٠- إذا كان $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفري ، $\overrightarrow{ج} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ فإن $\overrightarrow{أ} \,//\, \overrightarrow{ج}$ دائما

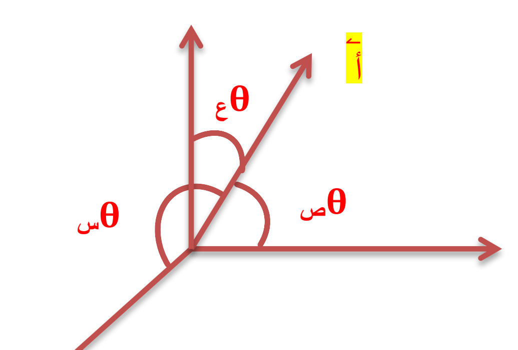
١١- لو كان معطي مقدار (معيار) المتجه $\overrightarrow{أ}$ وطلب إيجاد هذا المتجه في صورة إتجاهية $\overrightarrow{أ}$ فإنه يوجد ٣ حالات:-

١- $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| \times$ متجه الوحدة الذي يعمل فيه $\overrightarrow{أ}$ علي سبيل المثال إذا $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٥$ ويعمل في اتجاه $\overrightarrow{بج}$ حيث

$\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٠ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ج} (١ ، ١ ، ٣)$ فإن $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| \times \frac{\overrightarrow{بج}}{\|\overrightarrow{بج}\|}$ ، حيث $\overrightarrow{بج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{ب}$

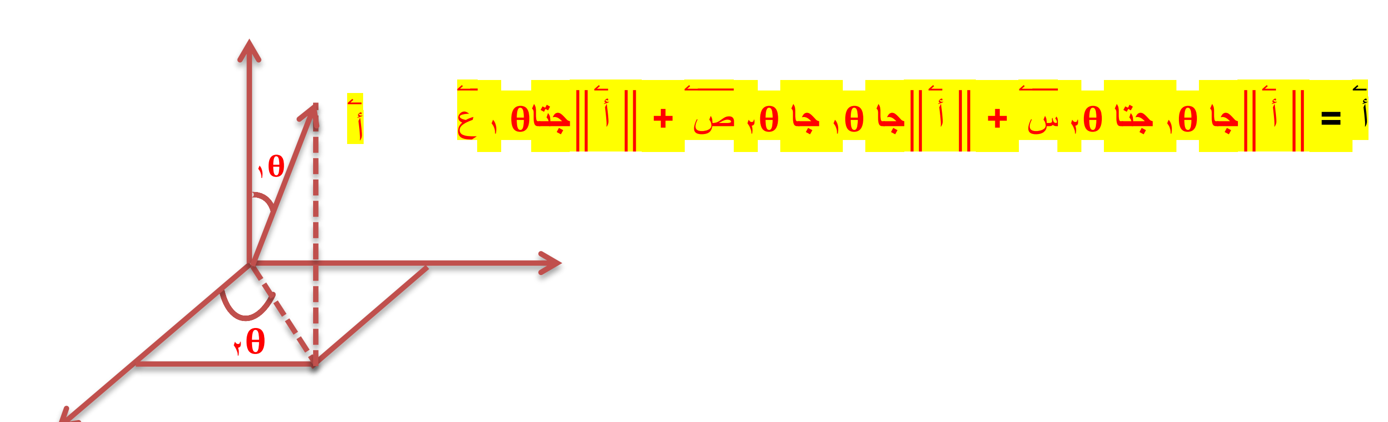
٢- $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا$\theta_{س}$ $\overrightarrow{س}$ + $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا$\theta_{ص}$ $\overrightarrow{ص}$ + $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا$\theta_{ع}$ $\overrightarrow{ع}$ ، خد بالك أنه ممكن يديك $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ بس

وأنت تعوض ف العلاقة الرابطة بينهم وتجيب $\theta_{ع}$ كما يلي :-



جتا$^{٢}\theta_{س}$ + جتا$^{٢}\theta_{ص}$ + جتا$^{٢}\theta_{ع}$ = ١

٣- برضه هيشغل زوايا بس هو عفريت ومش هيديهالك بصورة مباشرة ركز معايا كويس :-



$\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جا $\theta_{١}$ جتا $\theta_{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + $\|\overrightarrow{أ}\|$ جا $\theta_{١}$ جا $\theta_{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ + $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا$\theta_{١}$ $\overrightarrow{ع}$

ملاحظة لتثبيت معلومة :- $\overrightarrow{أ} = (ل ، م ، ن)$ فإن:- جتا$\theta_{س} = \frac{ل}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ ، جتا$\theta_{ص} = \frac{م}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ ، جتا$\theta_{ع} = \frac{ن}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

خامسا الضرب القياسي:-

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، $\overleftarrow{ب}$ = ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) ، θ الزاوية بين المتجهين :-

١- $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ = $س_1 س_2 + ص_1 ص_2 + ع_1 ع_2$

٢- $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ = $\|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\|$ جتا θ

٣- $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ > ٠ إذا كانت θ زاوية حادة

٤- $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ < ٠ إذا كانت θ زاوية منفرجة

٥- $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ = ٠ إذا كانت θ = ٩٠ ° ، أي أن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متعامدان

٦- الاسهم في الاشكال الهندسية لو داخلين أو خارجين مع بعض فإن $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ = $\|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\|$ جتا θ

٧- الاسهم في الاشكال الهندسية لو واحد داخل وواحد خارج فإن $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ = - $\|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\|$ جتا θ

٨- إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهي وحدة فإن $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ ∈ [-١ ، ١]

٩- لا يجاد الزاوية بين المتجهين جتا θ = $\frac{\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\|}$ أي جيب التمام

١٠- المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{أ}$ في اتجاه $\overleftarrow{ب}$ = $\frac{\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{ب}\|}$

١١- $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{أ}$ = $\|\overleftarrow{أ}\|^2$ ، $\overleftarrow{س} \odot \overleftarrow{س}$ = ١ ، $\overleftarrow{ص} \odot \overleftarrow{ص}$ = ١ ، $\overleftarrow{ع} \odot \overleftarrow{ع}$ = ١ ، $\overleftarrow{س} \odot \overleftarrow{ص}$ = ٠

١٢- $\overleftarrow{س} \odot \overleftarrow{ع}$ = ٠ ، $\overleftarrow{ص} \odot \overleftarrow{ع}$ = ٠ لأن س ، ص ، ع متعامدين وبالتالي الزاوية θ = ٩٠ °

١٣- لو معطي $\|\overleftarrow{أ}\|$ ، $\|\overleftarrow{ب}\|$ ، $\|\overleftarrow{ج}\|$ وطلب مثلا $\|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}\|$ ، $\|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{ج}\|$ لايجادهم :-

$\|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}\| = \sqrt{\|\overleftarrow{أ}\|^2 + \|\overleftarrow{ب}\|^2 + ٢ \overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}}$

$\|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{ج}\| = \sqrt{\|\overleftarrow{أ}\|^2 + \|\overleftarrow{ب}\|^2 + \|\overleftarrow{ج}\|^2 + ٢ \overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب} + ٢ \overleftarrow{ب} \odot \overleftarrow{ج} + ٢ \overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ج}}$

١٤- إذا كانت $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ج}$ متجهات متعامدة مثني مثني فإن $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{ب} \odot \overleftarrow{ج}$ = $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ج}$ = ٠

١٥- التطبيقات علي الضرب القياسي : إيجاد الشغل المبذول من القوة (ش) = $\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف}$ حيث :-

$\overleftarrow{ق}$: متجه القوة ، $\overleftarrow{ف}$: متجه الازاحة فمثلا إذا تحرك الجسم من نقطة أ الي ب فإن ف = ب – أ

١٦- لاحظ لو مديك ق كمقدار والمفروض نحولها لمتجه بأي حالة من ال ٣ حالات علي حسب المعطيات اللي مديهالك سواء زوايا أو خط عمل القوة ونقاط تأثيره

١٧- الزاوية θ بين المتجهين ∈ [٠ ، π]

سادسا الضرب الاتجاهي :-

إذا كان أ = (ل ، م ، ن) ، ب = (ك ، د ، و) ، θ الزاوية بين المتجهين :-

١- أ ⊗ ب = | س ص ع ؛ ل م ن ؛ ك د و | = (م و – د ن) س – (ل و – ك ن) ص + (ل د – ك م) ع

٢- ‖ أ ⊗ ب ‖ = ‖ أ ‖ ‖ ب ‖ جا θ

٣- لو طلب المتجه العمودي علي أ ، ب هو أ ⊗ ب

٤- لاحظ الفرق لو طلب منك متجه الوحدة العمودي علي أ ، ب هو ي = (أ ⊗ ب) / ‖ أ ⊗ ب ‖

٥- جا θ = ‖ أ ⊗ ب ‖ / (‖ أ ‖ ‖ ب ‖) أو جيب الزاوية

٦- أ ⊗ ب = - ب ⊗ أ ، أ ⊗ أ = و ، س ⊗ ص = ع ، ص ⊗ س = - ع .... الخ

٧- أ = (ل ، م) ، ب = (ك ، و) فإن أ ⊗ ب = (ل و – م ك) ع

٨- إذا كان أ // ب فإن أ ⊗ ب = و ، ‖ أ ⊗ ب ‖ = صفر ، ل/ك = م/د = ن/و

٩- مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه أ ، ب ضلعان متجاوران = ‖ أ ⊗ ب ‖

١٠- مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه أ ، ب قطران = ١/٢ ‖ أ ⊗ ب ‖

١١- مساحة المثلث الذي فيه أ ، ب ضلعان متجاوران = ١/٢ ‖ أ ⊗ ب ‖

١٢- أ = (ل ، م ، ن) ، ب = (ك ، د ، و) ، ج = (ف ، ق ، ي) فإن الضرب الثلاثي القياسي =

أ ⊙ ب ⊗ ج = | ل م ن ؛ ك د و ؛ ف ق ي | = ل (د ي – ق و) – م (ك ي – ف و) + ن (ك ق – ف د)

وهو ما يسمي حجم متوازي السطوح = مساحة القاعدة × الارتفاع

١٣- حجم الهرم = ١/٦ | أ ⊙ ب ⊗ ج |

١٤- إذا كان أ + ب = أ ⊗ ب فإن أ ، ب معكوس جمعي للاخر فمثلا أ (ل ، م ، ن) فإن ب (- ل ، - م ، - ن)

١٥- ‖ أ ⊗ ب ‖ = أ ⊙ ب فإن θ = ٤٥ °

أولا معادلة الخط المستقيم:-

$\bar{أ}$ (ل ، م ، ن) : نقطة معلومة تقع علي المستقيم ، ك: ثابت عدد حقيقي ، $\bar{هـ}$ (أ ، ب ، ج) : متجه إتجاه المستقيم فإن الصور المختلفةهي :-

١- الصورة المتجهه : $\bar{ر} = \bar{أ} + ك \bar{هـ}$ ، (س ، ص ، ع) = (ل ، م ، ن) + ك (أ ، ب ، ج)

٢- الصورة البارامترية : س = ل + أ ك ، ص = م + ب ك ، ع = ن + ك ج

٣- الصورة الإحداثية :- $\frac{س - ل}{أ} = \frac{ص - م}{ب} = \frac{ع - ن}{ج}$

حالات $\bar{هـ}$:-

١- معطاه بصورة صريحة في السؤال متجه الإتجاه للمستقيم

٢- إذا كان $ل_١ // ل_٢$ فإن $\bar{هـ}_١ = \bar{هـ}_٢$

٣- إذا كان معطي زوايا الاتجاه فإن $\bar{هـ}$ = جيوب تمام زوايا الإتجاه

٤- إذا كان معطي نسب الاتجاه فإن نسب الاتجاه = $\bar{هـ}$

٥- معلومة نقطتان علي المستقيم أ ، ب فإن : $\bar{هـ} = \overline{أب} = \bar{ب} - \bar{أ}$

٦- مستقيم يصنع زوايا متساوية في القياس فإن : $\bar{هـ} = (\pm\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \pm\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \pm\frac{١}{\sqrt{٣}})$ أو

(± ١ ، ± ١ ، ± ١) أو أي ارقام متساوية

٧- أو معطي أي صورة من الثلاث صور المختلفة لمعادلة المستقيم ويطلب إيجاد $\bar{هـ}$

٨- الزاوية بين مستقيمين: نوجد $\bar{هـ}_١$ ، $\bar{هـ}_٢$ ، $جتا \theta = \frac{|\bar{هـ}_1 \odot \bar{هـ}_2|}{\|\bar{هـ}_1\| \|\bar{هـ}_2\|}$

أوضاع مستقيمين في الفراغ:-

نوجد $\bar{هـ}_١$ = (ل ، م ، ن) ، $\bar{هـ}_٢$ = (أ ، ب ، ج)

١- متعامدان : $\bar{هـ}_١ \odot \bar{هـ}_٢$ = صفر

٢- متوازيان: $\bar{هـ}_١ = ك \bar{هـ}_٢$ أو $\bar{هـ}_١ \otimes \bar{هـ}_٢ = \bar{و}$ أو $\frac{ل}{أ} = \frac{م}{ب} = \frac{ن}{ج}$

٣- متقاطعان أو متخالفان :- هنا يجب التركيز وركز في الخطوات التالية :

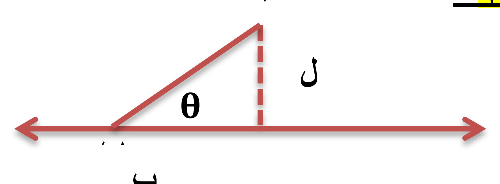
١- نوجد الثلاث معادلات البارامترية لكل مستقيم وبالتالي يصبح عندنا مجهول $ك_١$ ، $ك_٢$

٢- نكون ٣ معادلات بدلاله $ك_١$ ، $ك_٢$ ، نقوم بحل معادلتين جبريا وإيجاد $ك_١$ ، $ك_٢$

٣- إذا كان $ك_١$ ، $ك_٢$ يحققوا المعادلة الثالثة فإنهم متقاطعين

٤- إذا كان $ك_١$ ، $ك_٢$ لم يحققوا المعادلة الثالثة فإنهم متخالفين

طول العمود المرسوم (البعد العمودى) من النقطة أ على المستقيم :-



ل = $\frac{\| \overline{أب} \otimes \overline{هـ} \|}{\| \overline{هـ} \|}$ = أب جاθ

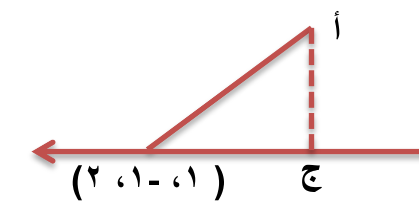
أهم وأخطر ملاحظة تكوين معادلة المستقيم المار بنقطة ما ويقطع مستقيم أخر علي التعامد:

١- يطلب إيجاد مسقط النقطة علي المستقيم
٢- يطلب طول العمود الساقط من النقطة علي المستقيم
٣- يطلب معادلة هذا المستقيم
٤- صورة النقطة

مثال :- إذا كانت النقطة (٢ ، - ١ ، ٣) والمستقيم ل الذي معادلته هي $\overline{ر}$ = (١، -١، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، -١)

١- أوجد مسقط النقطة (٢ ، - ١ ، ٣) علي المستقيم ل
٢- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، - ١ ، ٣) ويقطع المستقيم ل علي التعامد
٣- أوجد صورة النقطة (٢ ، - ١ ، ٣) بالإنعكاس في ل

أولا قم برسم توضيحي للفهم :-



من خلال الرسم يتبين أن ج هي مسقط النقطة (٢ ، - ١ ، ٣)

وأيضاً تقع علي المستقيم ل وبالتالي تكون ج هي :

∴ ج = (١ + ٢ ك ، - ١ + ٢ ك ، ٢ – ك) لايجادها لابد من إيجاد متجه إتجاه المستقيم أ ج وليكن $\overline{هـ}_٢$

حيث هذا المستقيم هو الذي يقطع ل الذي متجه إتجاهه $\overline{هـ}_١$ علي التعامد وبالتالي: $\overline{هـ}_١ \odot \overline{هـ}_٢$ = صفر

$\overline{هـ}_٢$ = $\overline{أج}$ = $\overline{ج}$ – $\overline{أ}$ = (٢ ك – ١ ، ٢ ك ، - ك – ١) ، $\overline{هـ}_١$ = (٢ ، ٢ ، -١)

$\overline{هـ}_١ \odot \overline{هـ}_٢$ = ٢ (٢ ك – ١) + ٢ (٢ ك) - (- ك – ١) = ٠ ، ∴ ك = $\frac{١}{٩}$

∴ ج = ($\frac{١١}{٩}$ ، $\frac{-٧}{٩}$ ، $\frac{١٧}{٩}$) مطلوب ١ ← ، $\overline{هـ}_٢$ = ($\frac{-٧}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{-١٠}{٩}$) ،

معادلة المستقيم = (٢ ، -١ ، ٣) + ك$_٢$ ($\frac{-٧}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{-١٠}{٩}$) مطلوب ٢ ← ويمكن تبسيط $\overline{هـ}_٢$

صورة النقطة بالانعكاس في ل = ٢ المسقط - النقطة = ٢ ج – أ = ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{-٥}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$)

بعض الملاحظات الأخري:-

١- جيوب تمام المحور س هي (١ ، ٠ ، ٠) = هَـ
٢- جيوب تمام المحور ص هي (٠ ، ١ ، ٠) = هَـ
٣- جيوب تمام المحور ع هي (٠ ، ٠ ، ١) = هَـ
٤- المستقيم الذي يوازي س ص فإن هَـ = (أ ، ب ، ٠)
٥- المستقيم الذي يوازي س ع فإن هَـ = (أ ، ٠ ، ج)
٦- المستقيم الذي يوازي ص ع فإن هَـ = (٠ ، ب ، ج)
٧- إذا كان ل ، م ، ن هما جيوب تمام الإتجاه لمستقيم في الفراغ فإن ل٢ + م٢ + ن٢ = ١
٨- معادلة المستقيم المار بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١) ويوازي محور س هي ص = ص١ ، ع = ع١
٩- معادلة المستقيم المار بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١) ويوازي محور ص هي س = س١ ، ع = ع١
١٠- معادلة المستقيم المار بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١) ويوازي محور ع هي س = س١ ، ص = ص١

معادلة المستوي في الفراغ:-

يتعين مستوي ب : ٣ نقاط ليست علي استقامة واحدة ، مستقيم ونقطة خارجة ، مستقيمان متقاطعان

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) نقطه تقع في المستوي رَ ، نَ (أ ، ب ، ج) متجه عمودي علي المستوي فإن الصور المختلفه لمعادلة المستوي :

١- الصورة المتجة : نَ ⊙ رَ = نَ ⊙ أَ ، (أ ، ب ، ج) ⊙ (س ، ص ، ع) = أ س١ + ب ص١ + ج ع١
٢- الصورة القياسية : أ (س – س١) + ب (ص – ص١) + ج (ع – ع١) = ٠
٣- الصورة العامة : أ س + ب ص + ج ع + د = ٠ ، حيث د = - نَ ⊙ أَ

ملاحظات

١- إذا كان المستوي المطلوب يوازي المستوي الذي معطي معادلته فإن: نَ١ = نَ٢
٢- إذا كان المستوي المطلوب عمودي علي المستقيم الذي معطي معادلته فإن: نَ = هَـ
٣- مستوي مار بثلاث نقط أ ، ب ، ج ، نَ = أبَ ⊗ أجَ ، و نأخذ أي نقطة من ال ٣ نقاط
٤- المستوي المار بالنقطة أ ويحوي المستقيم رَ = بَ + ك هَـ فإن: نَ = أبَ ⊗ هَـ
٥- مستوي يحوي مستقيمين متقاطعاتين متجه إتجاههما هَـ١ ، هَـ٢ فإن: نَ = هَـ١ ⊗ هَـ٢
٦- مستوي يحوي مستقيمين متوازيين رَ١ = أَ + ك١ هَـ١ ، رَ٢ = بَ + ك٢ هَـ٢ فإن: نَ = أبَ ⊗ هَـ٢
٧- مستوي عمودي علي مستويين متجه الاتجاه العمودي لهما نَ١ ، نَ٢ فإن: نَ = نَ١ ⊗ نَ٢

٨- مستوي يحوي المستقيم $\overleftarrow{ر}_1$ = $\overleftarrow{أ}$ + ك $\overleftarrow{هـ}_1$ ويوازي المستقيم $\overleftarrow{ر}_2$ = $\overleftarrow{ب}$ + ك $\overleftarrow{هـ}_2$ فإن :

$\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{هـ}_1 \otimes \overleftarrow{هـ}_2$ ، $\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{أب} \otimes \overleftarrow{هـ}_2$

٩- مستوي يحوي المستقيم $\overleftarrow{ر}_1$ = $\overleftarrow{أ}$ + ك $\overleftarrow{هـ}_1$،عمودي علي المستوي متجه العمودي له $\overleftarrow{ن}_1$ فإن $\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{هـ}_1 \otimes \overleftarrow{ن}_1$

١٠- الزاوية بين المستويين الذي $\overleftarrow{ن}_1$ ، $\overleftarrow{ن}_2$ متجهي العمودي علي المستويين فإن جتا θ = $\frac{|\overleftarrow{ن}_1 \odot \overleftarrow{ن}_2|}{\|\overleftarrow{ن}_1\| \, \|\overleftarrow{ن}_2\|}$

١١- الزاوية بين مستقيم ومستوي = ٩٠ - θ ، حيث جتا θ = $\frac{|\overleftarrow{ن} \odot \overleftarrow{هـ}|}{\|\overleftarrow{هـ}\|}$

١٢- معادلة المستوي المار بالاجزاء المقطوعة أ ، ب ، ج هي: $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} + \frac{ع}{ج} = ١$

١٣- لإيجاد مساحة المثلث بالاجزاء المقطوعة أ ، ب ، ج = $\frac{١}{٢} \|\overleftarrow{أب} \otimes \overleftarrow{أج}\|$

١٤- معادلة خط تقاطع المستويين نوجد أولا $\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{ن}_1 \otimes \overleftarrow{ن}_2$ ثم نوجد نقطة تقاطع بين المستويين بالفرض مثلا س = ١ ونحل المعادلات ونوجد ص ، ع

١٥- لإيجاد نقطة تقاطع مستقيم ومستوي أولا نوجد المعادلات البارامترية للمستقيم بدلاله ك ويتم التعويض بها في معادلة المستوي وإيجاد قيمة ك

الاوضاع بين المستويين:

١- **متعامدان :** $\overleftarrow{ن}_1 \odot \overleftarrow{ن}_2 = ٠$

٢- **متوازيان :** $\overleftarrow{ن}_1 \otimes \overleftarrow{ن}_2 = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ن}_1 = ك \overleftarrow{ن}_2$

الاوضاع بين المستقيم والمستوي خد بالااااااالك :-

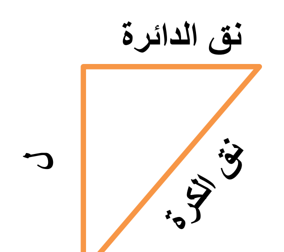
١- **متوازيان :** $\overleftarrow{هـ} \odot \overleftarrow{ن} = ٠$

٢- **متعامدان :** $\overleftarrow{هـ} \otimes \overleftarrow{ن} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{هـ} = ك \overleftarrow{ن}$

طول العمود الساقط من النقطه (ل ، م ، ن) علي المستوي: أ س + ب ص + ج ع + د = ٠ :

طول العمود = $\frac{|ل أ + م ب + ن ج - د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ج^٢}}$

مهم جدا جدا جدا لإيجاد نصف قطر المقطع الدائري الناشئ من تقاطع الكرة مع المستوي



١- نق الكرة معطي في معادلة الكرة
٢- ل : طول العمود الساقط من مركز الكرة علي المستوي
٣- (نق الدائرة)٢ = (نق الكرة)٢ – ل٢
٤- مساحة الدائرة = π (نق الدائرة)٢
٥- محيط الدائرة = ٢ π (نق الدائرة)

ملاحظة هامة وخطيرة جدا لإيجاد إحداثي مركز هذة الدائرة ؟

مركز الدائرة : هو مسقط مركز الكرة علي المستوي وبالتالي يجب معرفة إيجاد مسقط نقطة علي المستوي

مسقط نقطة أ علي المستوي

نفرض أن مسقط النقطة أ علي المستوي هي نقطة د وبالتالي تكون نقطة د تقع في المستوي وتقع علي

الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أد}$ وبالتالي نوجد نقطة تقاطع المستقيم والمستوي د ، مع العلم أن أ د عمودي علي المستوي

د = $\overleftarrow{أ}$ + ك $\overleftarrow{ن}$ وبالتعويض في معادلة المستوي

صورة أ في الانعكاس في المستوي

صورة النقطة = ٢ المسقط (د) – النقطة

صورة النقطة (ل ، م ، ن) بالإنعكاس :

١- حول محور س = (ل ، - م ، - ن)
٢- حول محور ص = (- ل ، م ، - ن)
٣- حول محور ع = (- ل ، - م ، ن)
٤- حول المستوي س ص = (ل ، م ، - ن)
٥- حول المستوي ص ع = (- ل ، م ، ن)
٦- حول المستوي س ع = (ل ، - م ، ن)

ملاحظات:

١- معادلة مستوي يوازي محور س هي ب ص + ج ع + د = ٠
٢- معادلة مستوي يوازي محور ص هي أ س + ج ع + د = ٠
٣- معادلة مستوي يوازي محور ع هي أ س + ب ص + د =٠
٤- نفس ال ٣ ملاحظات ولكن يحوي المحور فإن د = ٠